

Cours 13 : Etat fondamental de (NLS) - suite et fin.

Pour $\alpha \in \mathbb{C} \cup \mathbb{N}$, soit $\theta(r) = -r \frac{u'(r)}{u(r)}$, $r \in [0, z(\alpha)]$.

On a

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow z(\alpha)} \theta(r) = \infty.$$

La deuxième ligne est triviale si $\alpha \in \mathbb{N}$; si $\alpha \in \mathbb{C}$, elle découle du comportement asymptotique

$$u(r) \sim r^{-\frac{1}{2}} e^{-r}, \quad u'(r) \sim -r^{-\frac{1}{2}} e^{-r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \theta'(r) &= -\frac{u'}{u} - r \frac{u''u - (u')^2}{u^2} = -\frac{r}{u^2} \left[u \frac{u'}{r} + u u'' - (u')^2 \right] \\ &= -\frac{r}{u^2} \left[u \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) - (u')^2 \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{r}{u^2} \left[u(u - u^p) - (u')^2 \right]$$

$$= -\frac{r}{u^2} \left[u^2 - u^{p+1} - (u')^2 \right] = \frac{r}{u^2} \left[(u')^2 - u^2 + u^{p+1} \right].$$

Par la preuve du lemme 12.3,

$$E(r) = \frac{r}{2} (u')^2 - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{p+1} u^{p+1} > 0 \quad \forall r \in [0, z(\alpha)).$$

Donc $(u')^2 > u^2 - \frac{2}{p+1} u^{p+1}$, d'où

$$\vartheta'(r) > \frac{r}{u^2} \left(1 - \frac{2}{p+1} \right) u^{p+1} > 0 \quad \forall r \in [0, z(\alpha)).$$

Ainsi, ϑ est inversible. Soit $g = \vartheta^{-1}$ son inverse.

On a

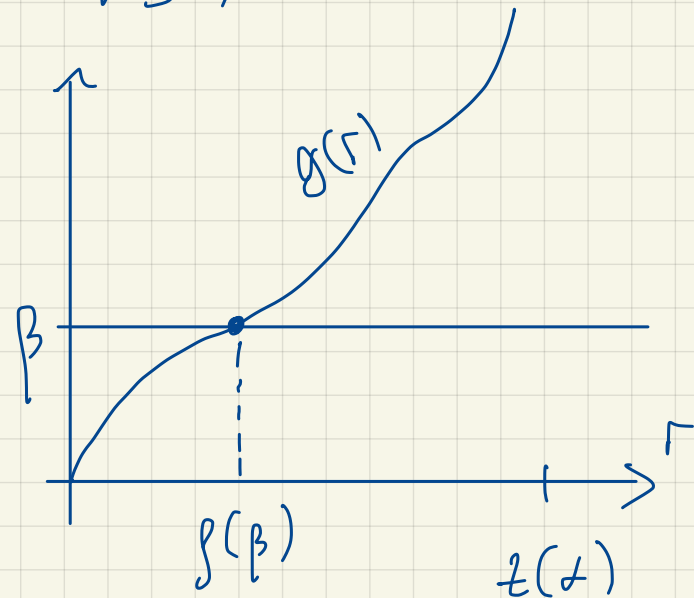
$$g(0) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\beta) = z(\alpha).$$

Pour $\beta > 0$, on définit

$$V_\beta(r) := ru'(r) + \beta u(r) = -u(r)[g(r) - \beta], \quad r \in [0, z(\alpha)).$$

On a donc

$$\begin{cases} V_\beta(r) > 0 & \text{si } r < g(\beta), \\ V_\beta(r) < 0 & \text{si } r > g(\beta). \end{cases}$$



De plus, V_β satisfait

$$V_\beta'' + \frac{1}{r} V_\beta' - V_\beta + p u(r)^{p-1} V_\beta = \varphi_\beta(r),$$

$$\text{où } \varphi_\beta(r) := [\beta(p-1) - 2] u(r)^p + 2u(r).$$

Une étude de fonction élémentaire montre qu'il existe

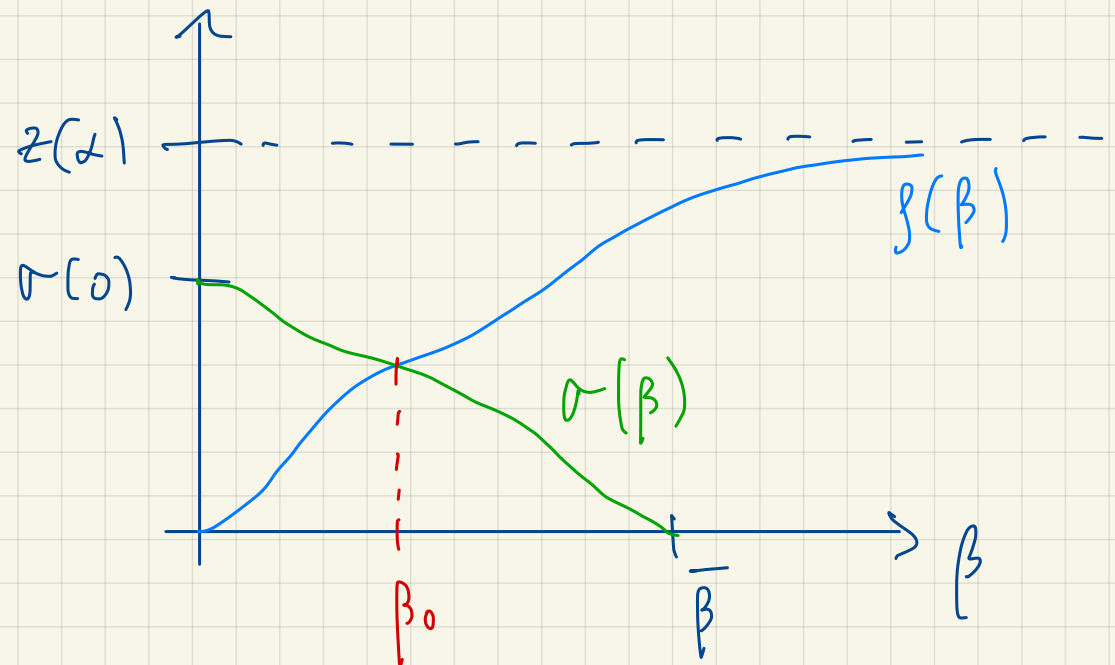
$\bar{\beta} > 0$ et une unique fonction $\sigma: [0, \bar{\beta}] \rightarrow [0, \infty)$ continue et strictement décroissante t.q.

$$\sigma(0) > 0, \quad \sigma(\bar{\beta}) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall \beta \in [0, \bar{\beta}], \quad \begin{cases} \varphi_{\beta}(r) < 0 & \text{si } r < \sigma(\beta), \\ \varphi_{\beta}(r) > 0 & \text{si } r > \sigma(\beta). \end{cases}$$

On a donc
et on conclut
 $\exists! \beta = \beta_0$ t.q.

$$\sigma(\beta) = f(\beta).$$



Posant $v = v_{\beta_0}$, $\beta_0 = \beta(\beta_0)$, on conclut
que v satisfait

$$(13.1) \quad \begin{cases} v'' + \frac{1}{r} v' - v + p u(r)^{p-1} v < 0, & v > 0, \text{ sur } (0, \beta_0), \\ v'' + \frac{1}{r} v' - v + p u(r)^{p-1} v > 0, & v < 0, \text{ sur } (\beta_0, z(\alpha)). \end{cases}$$

Nous allons comparer v avec $w = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$ qui satisfait

$$(13.2) \quad w'' + \frac{1}{r} w' - w + p u(r)^{p-1} w = 0 \quad \text{sur } (0, z(\alpha)).$$

Lemme 13.1 (thm de comparaison fort)

Supposons que u et v satisfont

$$u'' + f(x) u' + g(x) u = 0 \quad \text{sur } (a, b)$$

$$V'' + f(x) V' + g(x) V = 0 \quad \text{sur } (a, b),$$

avec $g(x) \geq g(x)$ et $U(x), V(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

Si $\frac{V'(a)}{V(a)} \leq \frac{U'(a)}{U(a)}$ alors $\frac{V'(x)}{V(x)} \leq \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \forall x \in (a, b)$

avec égalité ssi U et V sont lin. dép.

Le même résultat est vrai pour

$$\begin{aligned} U'' + f(x) U' + h(x) U &\geq 0, & U > 0, & \text{ sur } (a, b), \\ V'' + f(x) V' + h(x) V &\leq 0, & V > 0, & \text{ sur } (a, b). \end{aligned}$$

Preuve: Idemité de Picone.

On peut montrer (cf. Kwang '89) que (13.2) est

non-oscillante, i.e. aucune solution non-triviale de (13.2) ne possède un nombre infini de zéros.

Définition 13.1 : On appelle intervalle de déconjugaison de (13.2) le plus grand intervalle (d, ∞) sur lequel il existe une solution de (13.2) qui ne s'annule pas.

Remarque 13.1 : De façon équivalente (par Sturm), (d, ∞) est le plus grand intervalle sur lequel aucune solution non-triviale ne possède deux zéros.

Le lemme suivant (qui sort du cadre de ce cours) donne une propriété importante des EDO non-oscillantes.

Lemme 13.2 [Kwong '89, Lemma 6]

Toute solution de (13.2) qui possède un zéro dans (d, ∞) est non-bornée. Réciproquement, le dernier zéro de toute solution non-bornée est dans (d, ∞) .

Nous démontrons maintenant la propriété cruciale de w .

Lemme 13.3 : Pour $\alpha \in G \cup N$, w a un unique zéro $r_0 \in (0, z(\alpha))$. De plus, $w(z(\alpha)) < 0$ si $\alpha \in N$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} w(r) = -\infty$ si $\alpha \in P$.

Preuve: La fonction $v(r) = ru'(r) + \beta_0 u(r)$ satisfait (13.1), $v(0) = \beta_0 \alpha > 0$ et $v(z(\alpha)) = z(\alpha) u'(z(\alpha)) < 0$ si $\alpha \in N$ par le lemme 12.3. Ainsi, r_0 est l'unique zéro de

v dans $[0, z(\alpha)]$. Soit $r_0 \in (0, z(\alpha))$ le premier zéro de w . Par le lemme 13.1, en comparant (13.2) et la première ligne de (13.1), on déduit que $\beta_0 \in (0, r_0)$ (v oscille plus vite que w). Ainsi,

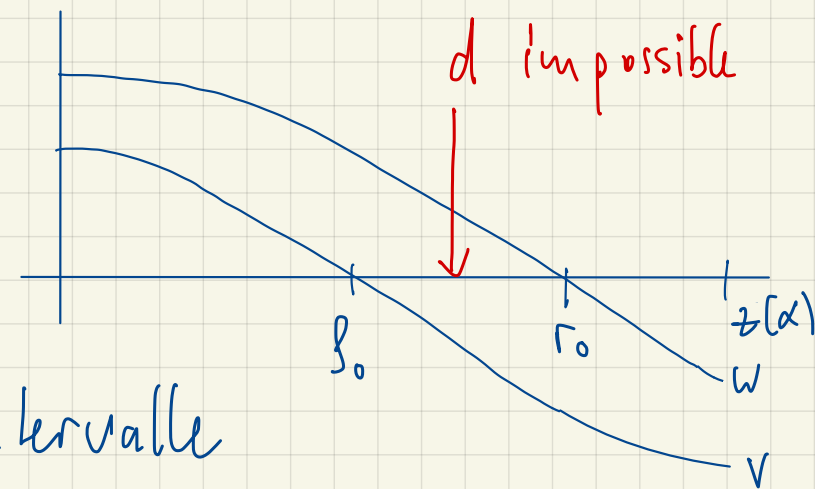
$$v'' + \frac{1}{r} v' - v + p u(r)^{p-1} v > 0, \quad v < 0, \quad \text{sur } (r_0, z(\alpha)).$$

Comme $w(r_0) = 0$ et v n'a pas de zéro $> \beta_0$, le lemme 13.1 implique que w n'a pas d'autre zéro dans $(r_0, z(\alpha))$. De plus, si

$z(\alpha) < \infty$, ceci reste vrai

sur $[r_0, z(\alpha)]$, d'où $w(z(\alpha)) < 0$.

Si $z(\alpha) = \infty$, soit (d, ∞) l'intervalle



de déconjugaison de (13.2). Alors $d < f_0$. En effet, si $d \geq f_0$, alors toute solution de (13.2) possède un zéro dans (f_0, ∞) . Soit $\tilde{w}$ une solution de (13.2) t.q. $\tilde{w}(f_0) = 0$, et soit $r_1 > f_0$ t.q. $\tilde{w}(r_1) = 0$. Alors, par le lemme 13.1, v doit avoir un zéro dans (f_0, r_1) . $\Downarrow$ Ainsi, $d < f_0 < r_0$, donc w est une solution de (13.2) qui possède un zéro dans (d, ∞) . Par le lemme 13.2, $\lim_{r \rightarrow \infty} w(r) = -\infty$. $\#$

Lemme 13.4: Soit $\alpha \in G$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset N$.

Première: Par les lemmes 13.3 et 13.4, nous avons

$r_0 \in (d, \infty)$, l'intervalle de déconjugaison de (13.2).

Soit r_1, r_2 t.q. $d < r_1 < r_0 < r_2$. Comme $w(r_1) > 0$ et $w(r_2) < 0$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

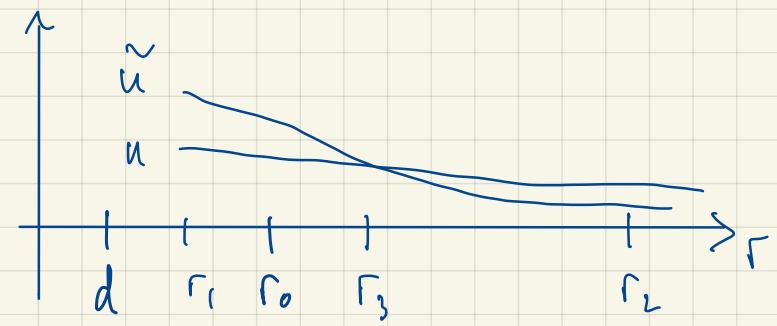
$\forall \tilde{\alpha} \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$, $\tilde{u}(r_1) > u(r_1)$ et $\tilde{u}(r_2) < u(r_2)$,
où $\tilde{u}(r) = u(r; \tilde{\alpha})$. Ainsi, pour tout $\tilde{\alpha} \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$
donné, le graphe de $\tilde{u}$ intersecte le graphe de u
en un point $r_3 \in (r_1, r_2)$. Nous allons montrer
qu'il existe $\tilde{r} \in (r_3, \infty)$ tel que $\tilde{u}(\tilde{r}) = 0$, d'où
 $\tilde{\alpha} \in N$. Supposons par l'absurde que $\tilde{u}(r) > 0 \forall r > r_3$.

Nous montrons tout d'abord que $\tilde{u}(r) < u(r) \forall r > r_3$.

Supposons par l'absurde $\exists r_4 > r_3$ t.q. $\tilde{u}(r_4) = u(r_4)$

et $u - \tilde{u} > 0$ sur (r_3, r_4) .

On remarque que $z := u - \tilde{u}$ satisfait



$$(13.3) \quad z'' + \frac{1}{r} z' + h(r) z = 0, \quad r \in (r_3, r_4),$$

où
$$h = \frac{u^p - \tilde{u}^p}{u - \tilde{u}} - 1 < p u^{p-1} - 1 \quad \forall r \in (r_3, r_4).$$

Comme (13.2) est un majorant de (13.3), w doit avoir un zéro dans (r_3, r_4) . $\Leftarrow$ Ainsi, $z > 0$

et (13.3) est un majorant de Sturm de (13.2)

sur (r_3, ∞) . Soit $\tilde{w}$ une solution de (13.2) telle

que $\tilde{w}(r_3) = 0$. Comme $r_3 > d$, le lemme 13.2 dit

que $\tilde{w}$ n'est pas bornée et l'on peut supposer que

$\tilde{w}(r) \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow \infty$). De plus, $\tilde{w} > 0$ sur (r_3, ∞) par la remarque 13.1. Par le lemme 13.1, on a

$$\frac{\tilde{w}'(r)}{\tilde{w}(r)} \leq \frac{z'(r)}{z(r)}, \quad \forall r > r_3.$$

En intégrant, il vient

$$\ln \tilde{w}(r) - \ln \tilde{w}(r_4) \leq \ln z(r) - \ln z(r_4) \quad \forall r > r_4 > r_3,$$

d'où

$$z(r) = u(r) - \tilde{u}(r) \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow \infty),$$

ce qui est impossible car $0 < \tilde{u}(r) < u(r)$ pour tout $r > r_3$ et $u(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

Donc $\tilde{u}$ doit s'annuler en un point $\tilde{r} > r_3$. #

Lemme 13.5: Soit $\alpha^* \in N$. Alors $[\alpha^*, \infty) \subset N$
et $z: [\alpha^*, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ est strictement décroissante.

Preuve: Tout d'abord, N est ouvert dans $(0, \infty)$
par dépendance continue en α de $u(r; \alpha)$:
si $\hat{\alpha} \in N$, il existe $\hat{r} > 0$ t.q. $u(\hat{r}; \hat{\alpha}) < 0$, donc
pour α proche de $\hat{\alpha}$, $u(\hat{r}; \alpha) < 0$, d'où $\alpha \in N$.
D'autre part, comme u ne peut avoir de zéro double,
un exercice facile donne $z: N \rightarrow (0, \infty)$ continue.
Par le lemme 13.3, $w(z(\alpha^*)) < 0$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$
assez petit, on a
 $(\alpha^*, \alpha^* + \varepsilon) \subset N$, $\forall \alpha \in (\alpha^*, \alpha^* + \varepsilon)$, $u(z(\alpha^*); \alpha) < 0$.

Par le TVI, pour $\alpha \in (\alpha^*, \alpha^* + \varepsilon)$, il existe $r \in (0, z(\alpha^*))$ t.q. $u(r; \alpha) = 0$. Comme $z(\alpha)$ est le premier zéro de u , on a $z(\alpha) \leq r < z(\alpha^*)$. On déduit que $z(\alpha)$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de α^* . On pose alors

$$\bar{\alpha} := \sup \left\{ \alpha > \alpha^*; [\alpha^*, \alpha) \subset N \text{ et } z: [\alpha^*, \alpha) \rightarrow (0, \infty) \text{ est strict. décr.} \right\}.$$

Supposons par l'absurde $\bar{\alpha} < \infty$. Alors il existe

$$z(\bar{\alpha}) := \lim_{\alpha \rightarrow \bar{\alpha}} z(\alpha) \in [0, \infty). \text{ Par continuité,}$$

$u(z(\bar{\alpha}); \bar{\alpha}) = 0$, d'où $\bar{\alpha} \in N$. Par les arguments dessus, on déduit que $[\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \varepsilon) \subset N$ et

$z: [\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon) \rightarrow (0, \infty)$ strict. d'incr. pour $\varepsilon > 0$
assez petit, ce qui contredit la d'f. de $\bar{x}$. $\Downarrow \#$

Preuve de la proposition 12.1: Par les lemmes 13.4
et 13.5, A contient au plus un point. Par le
théorème 12.1, A contient bien un point. Ainsi,
il existe $\alpha_0 > 1$ t.q. $A = \{\alpha_0\}$. De plus, par
les lemmes 13.4 et 13.5, $(\alpha_0, \infty) \subset N$. Finalement,
il n'existe aucun $\alpha_1 < \alpha_0$ t.q. $\alpha_1 \in N$ car on
aurait alors $(\alpha_1, \infty) \subset N$, d'où $\alpha_0 \in N$. On
conclut que $N = (\alpha_0, \infty)$ et $P = (1, \alpha_0)$. $\#$

Show:

$$U'' + f(x) U' + h(x) U \geq 0$$

$$U'' + f(x) U' =: -g(x) U \geq -h(x) U$$

$$\hookrightarrow g(x) \leq h(x)$$

$$V'' + f(x) V' =: -G(x) V \leq -h(x) V$$

$$\hookrightarrow G(x) \geq h(x) \geq g(x)$$

Continuité de $z(\lambda)$: Soit $(\lambda_n) \subset N$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_* \in N$.

D'abord, $z(\lambda_n)$ est borné, sinon $\lambda_* \in G$.

Supposons s.p.d.g. $z(\lambda_n) \rightarrow z_1$ et, par l'absurde,

$z_1 \neq z(\lambda_*)$. Comme $u(z(\lambda_n); \lambda_n) = 0 \quad \forall n$,

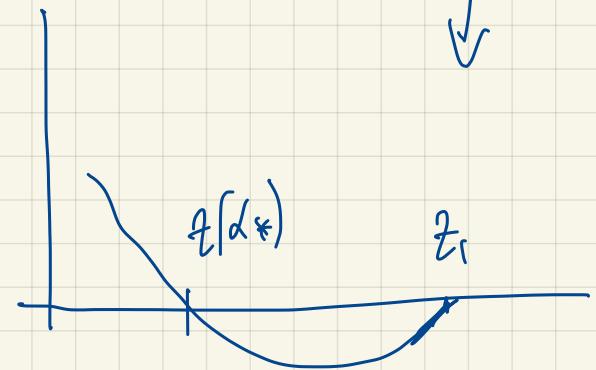
on a par continuité $u(z_1; \lambda_*) = 0$. Par définition,

$z(\lambda_*) < z_1$. On sait que $u'(z(\lambda_*); \lambda_*) < 0$ $\downarrow$

Mais on a aussi $u'(z(\lambda_n); \lambda_n) < 0$

$$\Rightarrow u'(z_1; \lambda_*) \leq 0.$$

Donc $u'(z_1; \lambda_*) = u(z_1; \lambda_*) = 0$. $\Downarrow$



$$u'(z_1; \lambda_*) \geq 0$$